

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Проректор по учебной работе и
довузовской подготовке**

А.А. Воронов

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Вычислительная математика
по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Системная и синтетическая биология Физтех-школа Биологической и Медицинской Физики кафедра вычислительной физики
курс:	3
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

5 (осенний) - Дифференцированный зачет

6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Аудиторных часов: 120 всего, в том числе:

лекции: 60 час.

семинары: 0 час.

лабораторные занятия: 60 час.

Самостоятельная работа: 150 час.

Всего часов: 270, всего зач. ед.: 6

Количество контрольных работ, заданий: 4

Программу составил: А.И. Лобанов, д-р физ.-мат. наук, профессор

Программа обсуждена на заседании кафедры вычислительной физики 28.05.2020

Аннотация

В программу курса включены основные разделы вычислительной математики: элементы теории погрешностей, аппроксимация функций одного переменного, численные алгоритмы линейной алгебры, метод наименьших квадратов, задачи безусловной оптимизации и введение в методы машинного обучения, квадратурные формулы, численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Сформировать у студентов систематическое представление о:

- 1) методах приближенного решения наиболее распространенных базовых типов математических задач;
- 2) источниках погрешностей и методах их оценки;
- 3) методах решения актуальных прикладных задач.

Задачи дисциплины

- 1) Освоение материала охватывающего основные задачи и методы вычислительной математики.
- 2) формирование целостного представления о численных методах решения современных научных прикладных задач.

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен планировать и проводить научные эксперименты (в избранной предметной области) и (или) теоретические (аналитические и имитационные) исследования	ПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями, законами и теориями современной физики

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны знать:

Область применения, теоретические основы, основные принципы, особенности и современные тенденции развития методов вычислительной математики.

уметь:

Применять методы численного анализа для приближенного решения задач в области своей научно-исследовательской работы.

владеть:

Программными средствами разработки вычислительных алгоритмов и программ, способами их отладки, тестирования и практической проверки соответствия реализованного алгоритма теоретическим оценкам.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Предмет вычислительной математики.	4		4	
2	Приближение функций, заданных на дискретном множестве. Дискретные математические модели динамики популяций и их свойства. Связь с итерационными методами решения нелинейных систем алгебраических уравнений.	5		5	15
3	Решение систем линейных алгебраических уравнений. Матричные модели в динамике популяций. Вопросы их численной реализации.	5		5	15
4	Численное дифференцирование	5		5	15
5	Численное интегрирование	5		5	15
6	Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Примеры траекторий различного типа устойчивости в решениях задач популяционной динамики (модели конкуренции видов, модель «хищник-жертва»).	6		6	15
7	Понятие жесткой задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ЖС ОДУ). Методы численного решения жестких систем ОДУ	2		2	9
8	Численное решение краевых задач для ОДУ	4		4	9
9	Разностные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных.	4		4	9
10	Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа	4		4	9
11	Системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа.	4		4	9
12	Численные методы решения линейных уравнений в частных производных параболического типа.	4		4	9
13	Понятие о методах расщепления. Метод переменных направлений.	4		4	9
14	Численные методы решения уравнений в частных производных эллиптического типа.	4		4	12

Итого часов	60		60	150
Подготовка к экзамену	0 час.			
Общая трудоёмкость	270 час., 6 зач.ед.			

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 5 (Осенний)

1. Предмет вычислительной математики.

Математическое моделирование как новый метод исследования. Примеры решения физических и биологических задач с помощью численных методов. Постановки некоторых задач вычислительной физики. 2. Предмет вычислительной математики. Специфика машинных вычислений. Элементарная теория погрешностей.

2. Приближение функций, заданных на дискретном множестве. Дискретные математические модели динамики популяций и их свойства. Связь с итерационными методами решения нелинейных систем алгебраических уравнений.

Задача алгебраической интерполяции. Существование и единственность алгебраического интерполяционного полинома. Интерполяционный полином в форме Лагранжа и в форме Ньютона. Остаточный член интерполяции. Интерполяция по чебышёвским узлам. Оценка погрешности интерполяции для функций, заданных с ошибками. Кусочно-многочленная интерполяция. Интерполяция сплайнами. *Локальные сплайны. *Сплайны с финитным носителем (В-сплайны).

3. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Матричные модели в динамике популяций. Вопросы их численной реализации.

Нормы в конечномерных пространствах. Обусловленность системы линейных алгебраических уравнений.

Прямые методы решения: метод Гаусса, метод Гаусса с выбором главного элемента, метод прогонки для систем специального вида.

Итерационные методы решения линейных систем. Метод простых итераций.

Необходимое, достаточное условия сходимости метода простых итераций. Метод Зейделя.

*Каноническая форма записи двухслойного итерационного метода.

*Методы решения, основанные на минимизации функционалов.

*Метод сопряженных градиентов.

*Проблема поиска собственных значений матрицы. *Степенной метод для вычисления максимального собственного числа.

*Метод вращений для поиска собственных значений самосопряженной матрицы. *Метод обратной итерации.

Переопределенные системы линейных алгебраических уравнений.

4. Численное дифференцирование

Простейшие формулы численного дифференцирования. Оценка погрешности.

5. Численное интегрирование

Квадратурные формулы Ньютона–Котеса (прямоугольников, трапеций, Симпсона) и оценка их погрешности. Квадратурные формулы Гаусса. *Методы вычисления несобственных интегралов.

6. Численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Примеры траекторий различного типа устойчивости в решениях задач популяционной динамики (модели конкуренции видов, модель «хищник-жертва»).

Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Теорема о связи аппроксимации, устойчивости, сходимости.

Простейшие численные методы решения задачи Коши для ОДУ. Методы Рунге–Кутты решения ОДУ.

*Методы Рунге–Кутты в представлении Бутчера. *Барьеры Бутчера. *Экспоненциальная оценка устойчивости. *Устойчивость при различных типах поведения решения (на устойчивых и «не устойчивых» траекториях). *Оценки погрешности и управление длиной шага при численном интегрировании систем ОДУ.

Семестр: 6 (Весенний)

7. Понятие жесткой задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ЖС ОДУ). Методы численного решения жестких систем ОДУ

Понятие жесткой задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ЖС ОДУ). Методы численного решения жестких систем ОДУ: одношаговые (явные методы Рунге–Кутты, методы Розенброка) и многошаговые (формулы дифференцирования назад). Исследование схем на А-устойчивость, L-устойчивость и монотонность. Функция устойчивости и область устойчивости методов Рунге–Кутты. Линейные многошаговые методы. Методы Гира в представлении Нордсика.

8. Численное решение краевых задач для ОДУ

Численное решение краевых задач для ОДУ. Методы решения линейных краевых задач (метод численного построения общего решения, конечно-разностный метод для линейного уравнения второго порядка, метод прогонки). Методы решения нелинейных краевых задач (метод стрельбы, метод квазилинеаризации). Вариационно-разностные и проекционные методы построения приближенного решения. *Метод конечных элементов. Задача на собственные значения (Штурма–Лиувилля). *Понятие жесткой краевой задачи. *Методы решения жесткой линейной краевой задачи.

9. Разностные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных.

Разностные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Методы построения аппроксимирующих разностных уравнений для уравнений в частных производных. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Приемы исследования разностных задач на устойчивость. Принцип максимума, спектральный признак устойчивости. Принцип замороженных коэффициентов.

10. Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа

Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа на примере уравнения переноса и волнового уравнения. Монотонные разностные схемы. Теорема С. К. Годунова о связи порядка аппроксимации и монотонности для линейных разностных схем.

11. Системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа.

Системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Характеристики, инварианты Римана. Корректная постановка краевых условий для системы уравнений с частными производными гиперболического типа. Характеристическая и девергентная формы записи. Разностные схемы для характеристической формы записи системы.

12. Численные методы решения линейных уравнений в частных производных параболического типа.

Квазилинейное уравнение теплопроводности, его свойства. Консервативные разностные схемы. Приемы построения консервативных разностных схем. Разностные схемы для решения многомерных уравнений теплопроводности.

13. Понятие о методах расщепления. Метод переменных направлений.

Вывод и особенности методов расщепления и переменных направлений.

14. Численные методы решения уравнений в частных производных эллиптического типа.

Численные методы решения уравнений в частных производных эллиптического типа. Разностная схема “крест” для численного решения уравнений Лапласа, Пуассона. Итерационные методы для численного решения возникающих систем линейных уравнений. Принцип установления для решения стационарных задач. Оценка количества итераций, необходимых для достижения заданной точности при использовании различных методов.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная персональными компьютерами, мультимедиапроектором и экраном.

6.Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Введение в вычислительную математику [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. С. Рябенский .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : Физматлит, 2008 .— 288 с.
2. Введение в вычислительную физику [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Р. П. Федоренко ; под ред. А. И. Лобанова .— 2-е изд., испр. и доп. — Долгопрудный : Интеллект, 2008 .— 504 с.
3. 12 лекций по вычислительной математике : вводный курс [Текст] : учеб. пособие для вузов / В. И. Косарев .— 3-е изд., испр. и доп. — М. : Физматкнига, 2013 .— 240 с.
4. Лекции по вычислительной математике [Текст] : учеб. пособие для вузов / И. Б. Петров, А. И. Лобанов .— М. : Интернет-Ун-т Информ. Технологий : БИНОМ. Лаб. знаний, 2006, 2010, 2013 .— 523 с.
5. Численные методы [Текст] : в 2 кн. : учебник для вузов / Н. Н. Калиткин, Е. А. Альшина .— М. : Академия, 2013 .— (Университетский учебник. Прикладная математика и информатика) .— Кн. 1 : Численный анализ. - 2013. - 304 с.

Дополнительная литература

1. Основы вычислительной математики [Текст] : учеб. пособие для вузов ; доп. М-вом высш. и сред. спец. образования СССР / Б. П. Демидович, И. А. Марон .— 4-е изд., испр. — М. : Наука, 1970 .— 664 с.
2. Математическое моделирование нелинейных процессов [Текст] / А. И. Лобанов, И. Б. Петров - М.Юрайт, 2017

Фонд литературы базовой кафедры

2. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. — М.: Мир, 1990. — 512 с.
3. Самарский А А., Гулин А В. Численные методы. — М.: Наука, 1989.

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

http://mipt.ru/education/chair/computational_mathematics/study/materials/compmath/

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

Компиляторы и среды разработки C++, JAVA, FORTRAN, PYTHON

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Студент, изучающий курс должен с одной стороны, овладеть общим понятийным аппаратом, а с другой стороны, должен научиться применять теоретические знания на практике.

Успешное освоение курса требует напряжённой самостоятельной работы студента. В программе курса отведено минимально необходимое время для работы студента над темой. Самостоятельная работа включает в себя:

- чтение и конспектирование рекомендованной литературы,
- проработку учебного материала (по конспектам лекций, учебной и научной литературе), подготовку ответов на вопросы, предназначенных для самостоятельного изучения, доказательство отдельных утверждений, свойств;
- решение задач, предлагаемых студентам на практических занятиях и в качестве курсового задания,
- подготовку к практическим занятиям и зачетам.

Руководство и контроль за самостоятельной работой студента осуществляется в форме индивидуальных консультаций.

Показателем владения материалом служит умение решать задачи.

Важно добиться понимания изучаемого материала, а не механического его запоминания.

При затруднении изучения отдельных тем, вопросов, следует обращаться за консультациями к лектору или преподавателю, ведущему практические занятия.

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению:	Прикладные математика и физика
профиль подготовки:	Системная и синтетическая биология Физтех-школа Биологической и Медицинской Физики кафедра вычислительной физики
курс:	<u>3</u>
квалификация:	бакалавр

Семестры, формы промежуточной аттестации:

- 5 (осенний) - Дифференцированный зачет
- 6 (весенний) - Дифференцированный зачет

Разработчик: А.И. Лобанов, д-р физ.-мат. наук, профессор

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области физико-математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ПК-1 Способен планировать и проводить научные эксперименты (в избранной предметной области) и (или) теоретические (аналитические и имитационные) исследования	ПК-1.1 Владеет фундаментальными понятиями, законами и теориями современной физики

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Вычислительная математика» обучающийся должен:

знать:

Область применения, теоретические основы, основные принципы, особенности и современные тенденции развития методов вычислительной математики.

уметь:

Применять методы численного анализа для приближенного решения задач в области своей научно-исследовательской работы.

владеть:

Программными средствами разработки вычислительных алгоритмов и программ, способами их отладки, тестирования и практической проверки соответствия реализованного алгоритма теоретическим оценкам.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

3. Перечень типовых контрольных заданий, используемых для оценки знаний, умений, навыков

Промежуточная аттестация по дисциплине «Вычислительная математика» осуществляется в форме зачета. Зачет проводится по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, лабораторных и других видов работ, предусмотренных программой дисциплины или путем организации специального опроса, проводимого в устной или письменной форме.

Перечень контрольных вопросов:

1. Специфика машинных вычислений.
2. Что такое машинный эпсилон? Как эта величина связана с конечной длиной мантиссы?
3. Элементы теории погрешностей. Абсолютная и относительная ошибки. Как эволюционируют погрешности при выполнении арифметических операций? Погрешность вычисления функций от величины, заданной с абсолютной погрешностью.
4. Численное дифференцирование. Простейшие формулы численного дифференцирования. Оценка погрешности формул численного дифференцирования. Оптимальный шаг численного дифференцирования.
5. Вывод формулы численного дифференцирования с помощью метода неопределенных коэффициентов.
6. Решение систем линейных алгебраических уравнений. Прямые методы: Гаусса, Гаусса с выбором главного элемента.
7. Обусловленность матрицы линейной системы.
8. Оценка погрешности прямых численных методов решения алгебраических систем.
9. Итерационные методы решения линейных систем. Метод простых итераций, метод Зейделя, метод верхней релаксации.
10. Проблема поиска собственных значений матрицы. Метод вращений для поиска собственных значений самосопряженной матрицы.
11. Задача алгебраической интерполяции. Существование и единственность решения. Интерполяционный полином в форме Лагранжа и в форме Ньютона.
12. Оценка погрешности интерполяционных формул, остаточный член интерполяции.
13. Функция Лебега, константа Лебега. Оценка погрешности интерполяции для функций, заданных с ошибками.
14. Оптимальный выбор узлов интерполяции. Полином Чебышёва.
15. Сплаины. Интерполяция сплайнами.
16. Численное интегрирование. Простейшие квадратурные формулы (прямоугольников, трапеций, Симпсона) и оценка их погрешности.
17. Квадратурные формулы Гаусса.
18. Методы приближенного решения нелинейных алгебраических уравнений.
19. Принцип сжимающих отображений. Метод простой итерации.
20. Метод Ньютона. Теорема о квадратичной сходимости метода Ньютона.
21. Численные методы решения задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Простейшие численные методы (явный метод Эйлера, неявный метод Эйлера, метод Эйлера с пересчетом).
22. Аппроксимация, устойчивость, сходимость. Теорема о связи аппроксимации, устойчивости, сходимости.
23. Методы Рунге–Кутты решения систем ОДУ. Устойчивость методов Рунге–Кутты. Экспоненциальная оценка устойчивости, устойчивость при различных типах поведения решения (на устойчивых и «не устойчивых» траекториях).
24. Правило Рунге оценки погрешности.
25. Понятие жесткой задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ЖС ОДУ). Методы численного решения жестких систем ОДУ: одношаговые

- (неявные методы Рунге-Кутты, методы Розенброка) и многошаговые (формулы дифференцирования назад).
26. А-устойчивость, L-устойчивость и монотонность. Функция устойчивости и область устойчивости методов Рунге-Кутты.
 27. Линейные многошаговые методы.
 28. Численное решение краевых задач для ОДУ. Методы решения линейных краевых задач (метод численного построения общего решения, конечно-разностный метод для линейного уравнения второго порядка, метод прогонки).
 29. Методы решения нелинейных краевых задач (метод стрельбы, метод квазилинеаризации).
 30. Разностные методы решения задач, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных. Методы построения аппроксимирующих разностных уравнений для уравнений в частных производных. Аппроксимация, устойчивость, сходимость.
 31. Приемы исследования разностных задач на устойчивость. Принцип максимума, спектральный признак устойчивости. Принцип замороженных коэффициентов.
 32. Численные методы решения уравнений в частных производных гиперболического типа на примере уравнения переноса и волнового уравнения.
 33. Монотонные разностные схемы.
 34. Системы дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа. Характеристики, инварианты Римана. Корректная постановка краевых условий для системы уравнений с частными производными гиперболического типа.
 35. Численные методы решения линейных уравнений в частных производных параболического типа. Явная и неявная схемы. Схема Кранка-Никольсон.
 36. Квазилинейное уравнение теплопроводности, его свойства. Консервативные разностные схемы. Приемы построения консервативных разностных схем.
 37. Разностные схемы для решения многомерных уравнений теплопроводности. Понятие о методах расщепления. Метод переменных направлений.
 38. Численные методы решения уравнений в частных производных эллиптического типа. Разностная схема “крест” для численного решения уравнений Лапласа, Пуассона.
 39. Итерационные методы для численного решения возникающих систем линейных уравнений. Принцип установления для решения стационарных задач.

См. Приложения Fall_FMBF.pdf и Spring_FMBF.pdf

4. Критерии оценивания

Оценка «отлично (10)» выставляется обучающемуся, если за семестровую контрольную работу набрано 20 и более баллов и средняя оценка за работу в семестре не ниже 4,75;

Оценка «отлично (9)» выставляется обучающемуся, если за семестровую контрольную работу набрано 20 и более баллов и средняя оценка за работу в семестре больше 4,5, но меньше 4,75;

Оценка «отлично (8)» выставляется обучающемуся, если за семестровую контрольную работу набрано 20 и более баллов и средняя оценка за работу в семестре больше 4,25, но меньше 4,5;

оценка «хорошо (7)» выставляется обучающемуся, если за семестровую контрольную работу набрано 15 и более баллов и средняя оценка за работу в семестре больше 4,0, но меньше 4,25;

оценка «хорошо (6)» выставляется обучающемуся, если за семестровую контрольную работу набрано 15 и более баллов и средняя оценка за работу в семестре больше 3,75, но меньше 4,0;

оценка «хорошо (5)» выставляется обучающемуся, если за семестровую контрольную работу набрано 15 и более баллов и средняя оценка за работу в семестре больше 3,5, но меньше 3,75;

оценка «удовлетворительно (4)» выставляется обучающемуся, если за семестровую контрольную работу набрано 12 и более баллов и средняя оценка за работу в семестре больше 3,25, но меньше 3,5;

оценка «удовлетворительно (3)» выставляется обучающемуся, если за семестровую контрольную работу набрано 12 и более баллов и средняя оценка за работу в семестре больше 3,0, но меньше 3,25;

оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется обучающемуся, если не выполнен какой-нибудь пункт учебной программы, не сданы лабораторные работы или задания, не написана семестровая контрольная работа

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Зачет проводится по итогам текущей успеваемости и сдачи заданий, лабораторных и других видов работ, предусмотренных программой дисциплины и путем организации специального опроса, проводимого в устной и письменной форме.

Время проведения письменной контрольной составляет 80 минут.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 1

Контрольный вопрос: Определение жесткой системы ОДУ.

1. (5) Дана модель Дэвиса-Скотче (Davis-Skodje), описывающая пространственно-однородный химический реактор,

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -y_1(t), \\ \dot{y}_2(t) = -\gamma y_2(t) + \frac{(\gamma-1)y_1(t) - \gamma y_1^2(t)}{(1+y_1(t))^2}, \end{cases}$$

где $\gamma > 1$ определяет коэффициент жесткости системы. Для решения системы уравнений применяется А-устойчивый однократно диагонально-неявный метод Рунге-Кутты 4 порядка аппроксимации, заданный таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{1+\alpha}{2} & \frac{1+\alpha}{2} & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{\alpha}{2} & \frac{1+\alpha}{2} & \\ \frac{1-\alpha}{2} & 1+\alpha & -1-2\alpha & \frac{1+\alpha}{2} \\ \hline & \frac{1}{6\alpha^2} & 1-\frac{1}{3\alpha^2} & \frac{1}{6\alpha^2} \end{array}$$

где $\alpha = \frac{2\cos(\pi/18)}{\sqrt{3}}$. Расписать покомпонентно вычисление всех вспомогательных векторов метода и расчетные формулы для каждой компоненты решения.

2. (4) Метод Рунге-Кутты задан таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1 & -1/2 & 1/2 \\ \hline & 1/2 & 1/2 \end{array}$$

Известно, что метод является А-устойчивым. Является ли он L-устойчивым? Используя функцию устойчивости, определить порядок аппроксимации метода.

3. (5) Построить общее решение краевой задачи для ОДУ на сетке $\{x_i : x_i = ih, h = 1/2, i = 0 : 2\}$:

$$\begin{aligned} y''(x) &= y'(x) - y(x) - 2e^{-x} \\ y(0) + y'(0) &= -1 \\ y'(1) &= 2 \end{aligned}$$

4. (4) Для решения нелинейной краевой задачи:

$$y'' + 2 \sin y = 0, \quad y(0) = \pi, \quad y(1) = 3\pi/2,$$

предложить разностный метод четвертого порядка аппроксимации. Построить алгоритм решения получившейся системы нелинейных уравнений.

5. (3) Показать, что метод $y_{n+2} - y_{n+1} = 0.25h(f_{n+2} + 2f_{n+1} + f_n)$ имеет область устойчивости, ограниченную параболой.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 2

Контрольный вопрос: Определение А-устойчивости численного метода.

1. (5) Для решения жесткой системы уравнений,

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2' - \varepsilon y_1(1 - y_1^2 - y_2^2), \\ y_2'(t) = y_1' - 3\varepsilon y_2(1 - y_1^2 - y_2^2), \end{cases}$$

применяется L-устойчивый диагонально-неявный метод Рунге-Кутты, заданный таблицей Бутчера:

1	1		
1/3	-1/12	5/12	
1	0	3/4	1/4
	0	3/4	1/4

Расписать покомпонентно вычисление всех вспомогательных векторов метода и расчетные формулы для каждой компоненты решения.

2. (4) Задача Коши для системы ОДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = 4y \cos^2 t - 5x, & x(0) = x^0, \\ \dot{y} = x - 5y, & y(0) = y^0, \end{cases}$$

решается методом Рунге-Кутты, заданного таблицей Бутчера:

0	
3/4	3/4
	1/3 2/3

При каких значениях шага по времени τ решение разностной задачи будет сходиться к решению дифференциальной?

3. (5) Построить общее решение краевой задачи для ОДУ на сетке $\{x_i : x_i = ih, h = 1/2, i = 0 : 2\}$:

$$\begin{aligned} y''(x) &= 3y'(x) - 2x \\ y(0) &= 1 \\ y(1) + y'(1) &= 2 \end{aligned}$$

4. (4) Для решения нелинейной краевой задачи:

$$y'' - e^{-y} = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

построить следующее приближение методом квазилинеаризации. В качестве начального приближения взять $y = 1 + x$.

5. (3) Найти общее решение уравнения $9y_{n-1} + 3y_n + y_{n+1} = 0$.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 3

Контрольный вопрос: Показатель жесткости системы.

1. (5) Дана модель Семенова для термического взрыва:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = y \exp \left[\frac{x}{1+0.31x} \right] - x, \\ \frac{dy}{dt} = -y \exp \left[\frac{x}{1+0.31x} \right], \end{cases}$$

где $\varepsilon < 1$. Для решения системы уравнений применяется метод Лобатто ПС 2 порядка аппроксимации, заданный таблицей Бутчера:

0	1/2	-1/2
1	1/2	1/2
	1/2	1/2

Расписать покомпонентно вычисление всех вспомогательных векторов метода и расчетные формулы для каждой компоненты решения.

2. (4) Метод Рунге-Кутты задан таблицей Бутчера:

0	0	0	0
1/2	1/4	1/4	0
1	0	1	0
	1/6	2/3	1/6

Показать, что метод не является А-устойчивым.

3. (5) Получить разностную схему для аппроксимации краевой задачи в области $0 \leq x \leq 1$ со вторым порядком точности:

$$\begin{aligned} y''(x) &= -2y(x) + 2(1 - x^3) \\ y'(0) &= 0 \\ y'(1) - 2y(1) &= 2 \end{aligned}$$

Найти решение задачи на сетке $\{x_i : x_i = ih, h = 1/2, i = 0 : 2\}$.

4. (4) Для решения нелинейной краевой задачи:

$$y'' - e^y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 0.$$

предложить разностный метод четвертого порядка аппроксимации.

5. (3) Описать алгоритм численного построения общего решения для следующего дифференциального уравнения:

$$y'' + (10 + x)y = xe^{-x}, \quad 0 < x < 10.$$

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 4

Контрольный вопрос: Что такое функция устойчивости метода?

1. (5) Дана модель Дэвиса-Скотче (Davis-Skodje), описывающая пространственно-однородный химический реактор,

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -y_1(t), \\ \dot{y}_2(t) = -\gamma y_2(t) + \frac{(\gamma-1)y_1(t) - \gamma y_1^2(t)}{(1+y_1(t))^2}, \end{cases}$$

где $\gamma > 1$ определяет коэффициент жесткости системы. Для решения системы уравнений применяется метод Радо ПА 3 порядка аппроксимации, заданный таблицей Бутчера:

1/3	5/12	-5/12
1	3/4	1/4
	3/4	1/4

Расписать покомпонентно вычисление всех вспомогательных векторов метода и расчетные формулы для каждой компоненты решения.

2. (4) Метод Рунге-Кутты задана таблица Бутчера:

1/2	1/2	0
1/2	0	1/2
	1/2	1/2

Является ли данный метод А-устойчивым? L-устойчивым?

3. (5) Получить разностную схему для аппроксимации краевой задачи в области $0 \leq x \leq 1$ со вторым порядком точности:

$$\begin{aligned} y''(x) &= (1+x)y'(x) - \frac{1}{x} \\ y(0) + 5y'(0) &= 0 \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

Найти решение задачи на сетке $\{x_i : x_i = ih, h = 1/2, i = 0 : 2\}$.

4. (4) Для решения нелинейной краевой задачи:

$$y'' - e^y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

построить следующее приближение методом квазилинеаризации. В качестве начального приближения взять $y = 1 + x$.

5. (3) Найти общее решение уравнения $y_{n-1} - 5y_n + 6y_{n+1} = 0$.

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 5

Контрольный вопрос: Определение L-устойчивости численного метода.

1. (5) Дана модель Семенова для термического взрыва:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{dx}{dt} = y \exp \left[\frac{x}{1+0.31x} \right] - x, \\ \frac{dy}{dt} = -y \exp \left[\frac{x}{1+0.31x} \right], \end{cases}$$

где $\varepsilon < 1$. Для решения системы уравнений применяется однократно диагонально-неявный метод Рунге-Кутты 3 порядка аппроксимации, заданный таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|ccc} \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} & & \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} & \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} & \\ \frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} & \frac{2-10\sqrt{5}}{5\sqrt{15}} & \frac{-17-10\sqrt{5}}{5\sqrt{15}} & \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2\sqrt{5}} \\ \hline & \frac{5}{18} & \frac{4}{9} & \frac{5}{18} \end{array}$$

Расписать покомпонентно вычисление всех вспомогательных векторов метода и расчетные формулы для каждой компоненты решения.

2. (4) Задача Коши для системы ОДУ

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \cos t + y(1 - \sin t), & x(0) = x^0, \\ \dot{y} = x(1 + \sin t) - y \cos t, & y(0) = y^0, \end{cases}$$

на отрезке $[0, \pi/2]$ решается методом Рунге-Кутты, заданного таблицей Бутчера:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & 0 \\ 2/3 & 2/3 & 0 \\ \hline & 1/4 & 3/4 \end{array}$$

При каких значениях шага по времени τ решение разностной задачи будет сходиться к решению дифференциальной?

3. (5) Построить общее решение краевой задачи для ОДУ на сетке $\{x_i : x_i = ih, h = 1/2, i = 0 : 2\}$:

$$\begin{aligned} y''(x) &= -\frac{1}{2}y(x) - x \\ y(0) &= 1 \\ y'(1) - y(1) &= -1 \end{aligned}$$

4. (4) Для решения нелинейной краевой задачи:

$$y'' + 2 \sin y = 0, \quad y(0) = \pi, \quad y'(1) = 0.$$

5. (3) Исследовать на устойчивость неявный метод Милна-Симпсона:

$$3(y_{n+1} - y_{n-1}) = h(f_{n+1} + 2f_n + f_{n-1}).$$

ФИО	Группа	1	2	3	4	5	Σ	Оценка	Подпись

Вариант 6

Контрольный вопрос: Асимптотический смысл устойчивости.

1. (5) Для решения жесткой системы уравнений,

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2' - \varepsilon y_1(1 - y_1^2 - y_2^2), \\ y_2'(t) = y_1' - 3\varepsilon y_2(1 - y_1^2 - y_2^2), \end{cases}$$

применяется метод Радо IA 3 порядка аппроксимации, заданный таблицей Бутчера:

0	1/4	-1/4
2/3	1/4	5/12
	1/4	3/4

Расписать покомпонентно вычисление всех вспомогательных векторов метода и расчетные формулы для каждой компоненты решения.

2. (4) Метод Рунге-Кутты задан таблицей Бутчера:

0	0	0	0
1/2	0	1/2	0
1	1/2	1/2	0
	1/3	1/3	1/3

Показать, что метод не является A-устойчивым.

3. (5) Получить разностную схему для аппроксимации краевой задачи в области $0 \leq x \leq 1$ со вторым порядком точности:

$$\begin{aligned} y''(x) &= \frac{1}{1+x} y'(x) + \frac{1}{1+x^2} \\ 2y(0) + y'(0) &= 1 \\ y'(1) &= 3 \end{aligned}$$

Найти решение задачи на сетке $\{x_i : x_i = ih, h = 1/2, i = 0 : 2\}$.

4. (4) Для решения нелинейной краевой задачи

$$y'' - e^y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(1) = 2.$$

построить численный метод, основанный на методе стрельбы.

5. (3) Описать алгоритм численного построения общего решения для следующего дифференциального уравнения:

$$y'' - (10 + x)y = xe^{-x}, \quad 0 < x < 10.$$